

Spieltheorie

Nullsummenmatrixspiel

- Es sei $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ die Spielmatrix eines Zweipersonen-Nullsummenspiels.

	1	...	j	...	n
1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
⋮
i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
⋮
m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

- Nutzen des Zeilenspielers: a_{ij}
- Nutzen des Spaltenspielers: $-a_{ij}$

Zeilenspieler:

Falls er i spielt, muß er mit dem schlimmsten Fall, einem Nutzen von

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \text{ rechnen,}$$

Er wird nun diejenige Strategie spielen, die ihm ein maximales α_i sichert, d.h.

seinen Maximin-Wert erreicht $\alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$

Spaltenspieler:

Er wird nun diejenige Strategie spielen, die ihm ein maximales β_j sichert, d.h.

seinen Minimax-Wert erreicht $\beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$

	1	...	j	...	n	
1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	α_1
⋮	
i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}	α_i
⋮	
m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	α_m
	β_1	...	β_j	...	β_n	

$$\text{Maximin} \leq \text{Minimax}$$

Ist **Maximin = Minimax** so besitzt das Spiel zumindest einen **Sattelpunkt in reinen Strategien** (Paar aus Maximin- und Minimax-Strategien); **w** wird als Spielwert bezeichnet.

	1	2	3	
1	3	6	6	3
2	2	0	3	0
3	0	8	4	0
	3	8	6	3

Ist $w=0$ dann ist das Spiel ein faires Spiel

Doch nicht jedes Spiel besitzt einen Spielwert in reinen Strategien, deshalb führen wird den Begriff der **gemischten Strategien** ein.

Eine gemischte Strategie ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der

reinen Strategien, d.h. $x' = (x_1, \dots, x_m); \sum_{i=1}^m x_i = 1; x_i \geq 0$

oder $y' = (y_1, \dots, y_n); \sum_{j=1}^n y_j = 1; y_j \geq 0$ für Zeilen- oder Spaltenspieler.

Der erwartete Nutzen des Zeilenspielers, falls er x' , der Gegner jedoch y' spielt, ist: $x' Ay$.

Unter X, respektive Y verstehen wir die Simplexe:

$$X = \{x : \sum_{i=1}^m x_i = 1; x_i \geq 0\} \quad \text{bzw.} \quad Y = \{y : \sum_{j=1}^n y_j = 1; y_j \geq 0\}$$

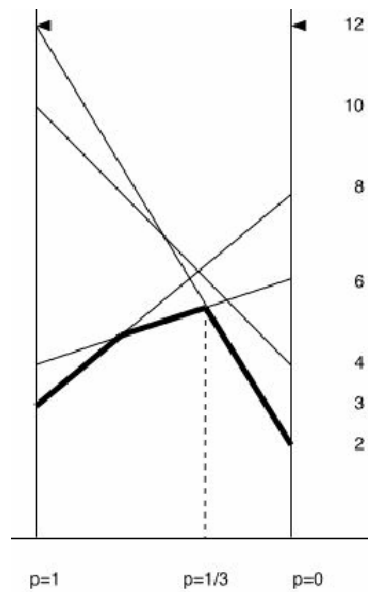
Jedes Matrixspiel besitzt einen Sattelpunkt $(x^*; y^*)$ in gemischten Strategien, so

dass gilt: $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x' Ay = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x' Ay = (x^*)' Ay^*$

Wir betrachten folgendes **Beispiel**:

	1	2	3	4
1	3	4	10	12
2	8	6	4	2

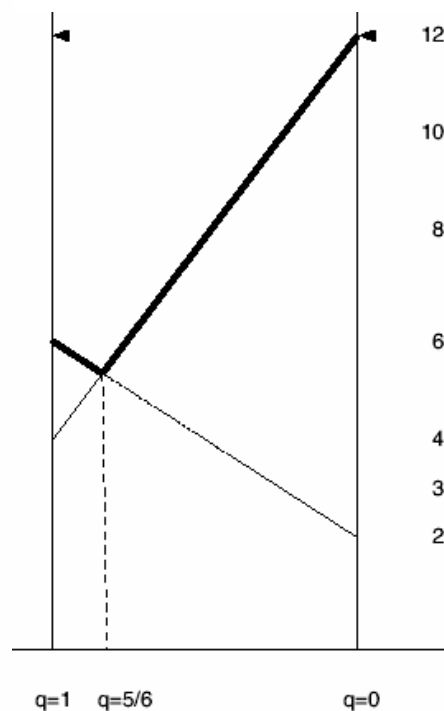
Die **geometrische Methode** zum auffinden des Sattelpunkts:



Die dicke Linie ist die untere Einhüllende.
Bei $p=1/3$ haben wir unseren **Maximin Pkt.**

Die gemischte Maximin-Strategie des Zeilenspielers ist $x^* = (1/3; 2/3)'$.
Da nur zwei reine Strategien des Gegenspielers sie schnittpunktartig bestimmen,
reduzieren wir nun die Spielmatrix:

	2	4
1	4	12
2	6	2



Unser Spiel hat somit den Sattelpunkt $(x^*; y^*)$ mit:
 $x^* = (1/3; 2/3)'$; $y^* = (0; 5/6; 0; 1/6)'$

LP-Problem:

Wir beginnen nun mit dem Spaltenspieler und ermitteln so die **primale Aufgabe**:

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} x' Ay \quad \text{wobei} \quad \max_{x \in X} x' Ay = v(y) \quad \text{mit} \quad v(y) \geq x' Ay$$

$$\Rightarrow v(y) = e_i' Ay = a_i y$$

mit e_i' ...ite Einheitsvektor

wir haben also folgende Optimierungsaufgabe:

$$\begin{array}{l} \min_y v(y) \\ v(y) * 1_m \geq Ay \\ y \geq 0 \end{array} \quad \text{wobei} \quad 1_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir definieren nun $\tilde{y} := \frac{y}{v(y)}$ und erhalten somit eine klassische Aufgabe der LP:

$$\begin{array}{l} \max Z = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \\ A \tilde{y} \leq 1_m \\ \text{unter Nebenbedingungen: } \tilde{y} \geq 0 \end{array}$$

Für den Zeilenspieler erhält man auf die gleiche Art und Weise die **duale Aufgabe**:

$$\begin{array}{l} \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x' Ay \Rightarrow \min Z = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \\ A' \tilde{x} \leq 1_n \\ \text{unter Nebenbedingungen: } \tilde{x} \geq 0 \end{array}$$

Bsp.: Schere Stein Papier

$$\max Z = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3$$

unter den Nebenbedingungen:

$$2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + 3\tilde{y}_3 \leq 1$$

$$3\tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \leq 1$$

$$\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_3 \leq 1$$

$$\tilde{y}_i \geq 0$$

i	BV	\tilde{y}_1	\tilde{y}_2	\tilde{y}_3	\tilde{y}_4	\tilde{y}_5	\tilde{y}_6	rechte Seite	Quo.	Probe
0	Z	-1	-1	-1	0	0	0	0		
1	\tilde{y}_4	2	1	3	1	0	0	1		
2	\tilde{y}_5	3	2	1	0	1	0	1		
3	\tilde{y}_6	1	3	2	0	0	1	1		

Nach Durchführen des Simplex erhalten wir die optimale Lösung:

i	BV	\tilde{y}_1	\tilde{y}_2	\tilde{y}_3	\tilde{y}_4	\tilde{y}_5	\tilde{y}_6	rechte Seite	Quo.	Pro.
0	Z	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/2		
1	\tilde{y}_3	0	0	1	7/18	-5/18	1/18	1/6		1 * 1/6
2	\tilde{y}_1	1	0	0	1/18	7/18	-5/18	1/6		1 * 1/6
3	\tilde{y}_2	0	1	0	-5/18	1/18	7/18	1/6		1 * 1/6

Das optimale Z^* $Z^* = \frac{1}{v(y^*)} = \frac{1}{2}$

Sattelpunkt: $y^* = \tilde{y}^* v(y^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)' = x^*$