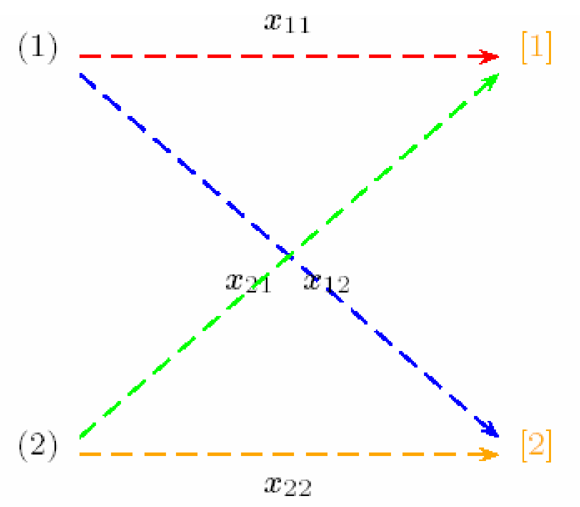
Zuordnungsproblem

Hier sind Angebots und Nachfrageknoten jeweils mit 1 EH Produktion oder Verbrauch gegeben.



Es sei ein einfaches 2 x2-dimensionales Zuordnungsproblem in graphischer Darstellung gegeben.
Den beiden Knoten [1] und [2] ordnen wir die Preise: p1 und p2 zu.

Primales Zuordnungsproblem

$$\max_{\{x_{ij}\}} a_{11} \cdot x_{11} + a_{12} \cdot x_{12} + a_{21} \cdot x_{21} + a_{22} \cdot x_{22}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ll}
1 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} = 1 & q_1 \\
0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{21} + 1 \cdot x_{22} = 1 & q_2 \\
1 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} = 1 & p_1 \\
0 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{21} + 1 \cdot x_{22} = 1 & p_2
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall ij$$

Duale Zuordnungsproblem

$$\min_{\{q_i, p_j\}} q_1 + q_2 + p_1 + p_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$1 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 \geq a_{11}$$

$$1 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 \geq a_{12}$$

$$0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 + 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 \geq a_{21}$$

$$0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 + 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 \geq a_{22}$$

Der komplementäre Schlupf:

Eine Verallgemeinerung der Zuordnungsdimension ergibt folgende duale Ungleichungen:

$$a_{ik} - p_k \leq q_i \quad \forall i, k$$

Ordnet eine optimalen Zuordnung tatsächlich der iten Person das Objekt j zu, und sind qi und pi optimale Lösungen des zugehörigen dualen Problems, so folgt unmittelbar aus der komplementären Schlupfbedingung:

$$x_{ij} \cdot [q_i + p_j - a_{ij}] = 0$$

folgende Optimalitätsbedingung:

$$a_{ij} - p_j = \min_k \{a_{ik} - p_k\} \quad (= q_i)$$

Lösung des Problems durch die **ungarische Methode:**

Es sei das nachfolgende Zuordnungsproblem mit Kostenmatrix gegeben.

3	4	5	4	6
4	4	2	3	6
5	1	6	5	1
6	7	7	10	8
4	5	3	5	6

1.Phase:

1.Schritt:	Bestimmen der Zeilenminima
2.Schritt:	Abziehen der Zeilenminima von den jeweiligen Zeilen
3.Schritt:	Bestimmen der Spaltenminima
4.Schritt:	Abzug der Spaltenminima

1.Schritt:

$$\begin{array}{|ccccc|c}
\hline
3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 3 \\
4 & 4 & 2 & 3 & 6 & 2 \\
5 & 1 & 6 & 5 & 1 & 1 \\
6 & 7 & 7 & 10 & 8 & 6 \\
4 & 5 & 3 & 5 & 6 & 3 \\
\hline
\end{array}$$

2.Schritt

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 4 \\
4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\
\hline
\end{array}$$

3.Schritt

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 4 \\
4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{c}{0}
\end{array}$$

4.Schritt:

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 4 \\
4 & 0 & 5 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
\hline
\end{array}$$

Wir erhalten eine Matrix die in jeder Zeile bzw. Spalte zumindest eine 0 enthält

5.Schritt: Wir bestimmen die maximale Anzahl unabhängiger 0-er (die somit keine Zeile oder Spalte gemeinsam haben).
Man sucht vorerst eine Zeile oder Spalte mit einer minimalen 0-er Anzahl, markiert eine 0 und streicht alle anderen in der gleichen Zeile und Spalte

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
0 & 1 & 2 & & 3 \\
2 & 2 & & 0 & 4 \\
4 & 0 & 5 & 3 & \\
 & 1 & 1 & 3 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
\hline
\end{array}$$

2.Phase:
Stimmt die maximale Anzahl unabhängiger 0-er nicht mit der Zeilen(Spalten)anzahl überein, so bestimmt man die minimale Anzahl von Überdechungslinien, die alle 0-er überdecken. Diese Anzahl ist stets gleich der maximalen Anzahl unabhängiger 0-er.

Wir verwenden folgendes Verfahren:

1.Schritt: Markiere jede Zeile, die keine markierte, rote 0 besitzt durch ein rotes Kreuz

2.Schritt: Markiere ebenso jede Spalte, die eine gelöschte 0 in einer bereits markierten Zeile enthält.

3.Schritt: Markiere jede Zeile, die eine markierte 0 in einer bereits markierten Spalte enthält.

4.Schritt: Wiederhole die Schritte 2 und 3 solange, bis keine weitere Zeile oder Spalte markiert werden kann.

1.Schritt:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & & 3 \\ 2 & 2 & & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 3 & \\ & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \times \\ \\ \end{array} \end{array}$$

2.Schritt:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \times & & & & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & & 3 \\ 2 & 2 & & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 3 & \\ & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \times \\ \\ \end{array} \end{array}$$

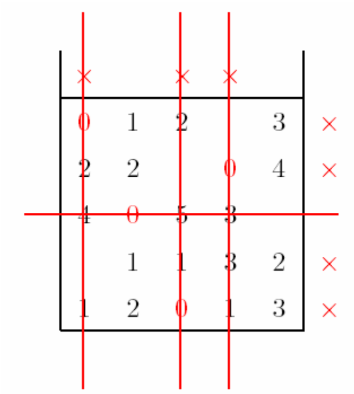
3.Schritt:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \times & & & & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & & 3 \\ 2 & 2 & & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 3 & \\ & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \times \\ \\ \\ \times \\ \\ \end{array} \end{array}$$

4.Schritt:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \times & & \times & \times & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & & 3 \\ 2 & 2 & & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 3 & \\ & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \\ \times \\ \times \end{array} \end{array}$$

5.Schritt: Streiche jede Zeile durch, die nicht markiert wurde, sowie jede Spalte, die markiert wurde. Das resultierende System ist minimal.

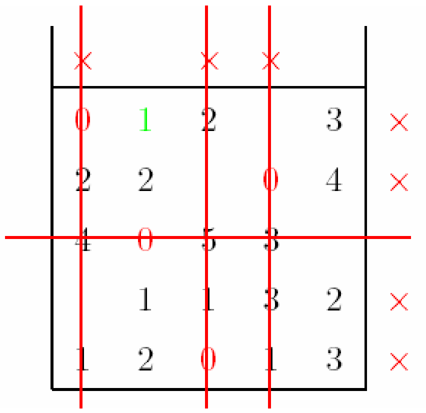


Kostentransformation (Phase 3)

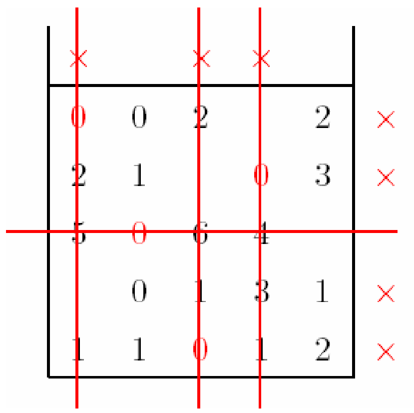
1.Schritt: Man bestimme nun das minimale unter den nicht überdeckten Elementen (das notwendigerweise > 0 sein muß).

2.Schritt: Subtrahiere es von allen nicht überdeckten Elementen und füge es zu allen doppelt überdeckten Elementen hinzu.

1.Schritt:



2.Schritt:



Da jede Zeile und jede Spalte zumindest einen 0-er enthält, kann man wiederum die maximale Anzahl unabhängiger 0-er bestimmen. -> geht von vorne los

Optimale Zuordnung: **maximale Anzal unabhängiger 0-er = der Anzahl der Zeilen**

	0	2		2
2	1		0	3
5		6	4	0
0		1	3	1
1	1	0	1	2

Travelling Salesman

Es sei folgende Distanzmatrix in einem asymetrischen Netzwerk zur Bestimmung der kostenminimalen Tour gegeben:

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
\infty & 10 & 6 & 1 & 9 \\
13 & \infty & 3 & 12 & 6 \\
13 & 8 & \infty & 9 & 6 \\
8 & 16 & 18 & \infty & 12 \\
25 & 20 & 4 & 13 & \infty \\
\hline
\end{array}$$

Phase 1: genauso wie bei Zuordnungsproblem durchführen

$$\begin{array}{|ccccc|c}
\cline{1-5}
\infty & 7 & 5 & 0 & 8 & 1 \\
10 & \infty & 0 & 9 & 3 & 3 \\
7 & 0 & \infty & 3 & 0 & 6 \\
0 & 6 & 10 & \infty & 4 & 8 \\
21 & 14 & 0 & 9 & \infty & 4 \\
\cline{1-5}
\multicolumn{1}{c}{} & 2 & & & & 24
\end{array}$$

Die **Summe der Minima = 24** ergibt die erste Kostenabschätzung.

Phase 2:

Für jede 0 lassen sich nun die **Strafkosten** bestimmen, die entstehen falls man diese Zuordnung nicht in die Tour aufnimmt.

Bedecken Sie die 0 und bestimmen Sie die nunmehrigen Zeilen- und Spaltenminima. Deren Summe ergibt die Strafkosten.

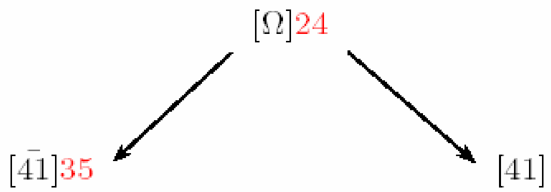
$$\begin{array}{|ccccc|c}
\cline{1-5}
\infty & 7 & 5 & 0 & 8 & 5 \\
10 & \infty & 0 & 9 & 3 & 3 \\
7 & 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 10 & \infty & 4 & 4 \\
21 & 14 & 0 & 9 & \infty & 9 \\
\cline{1-5}
7 & 6 & 0 & 3 & 3 &
\end{array}$$

Die 0 **mit den maximalen Strafkosten** bestimmt nunmehr die erste Zuordnung einer Teilstrecke zur Tour. Diese Zuordnung ist: **41.**

Wird 41 gewählt, so darf von 4 aus und nach 1 keine weitere Zuordnung erfolgen; auch 14 muß verhindert werden.

Phase 3:

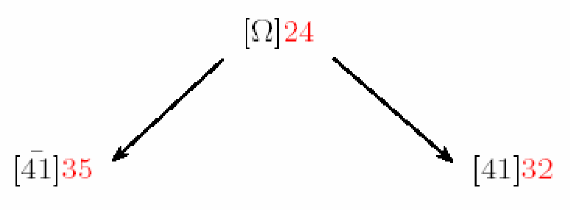
Falls **41 nicht für die Tour** ausgewählt wird, fügen **wir die Strafkosten von 11** zu der Anfangsabschätzung von 24 hinzu. Sämtliche Touren, die nicht die Zuordnung 41 enthalten, verursachen mindestens Kosten von **24 + 11 = 35**.



Nach **Streichen der 4-ten Zeile, der 1-ten Spalte**, sowie nach Ersetzendes Elements 14 durch ∞, können Zeilen- und Spaltenminima neu bestimmt werden.

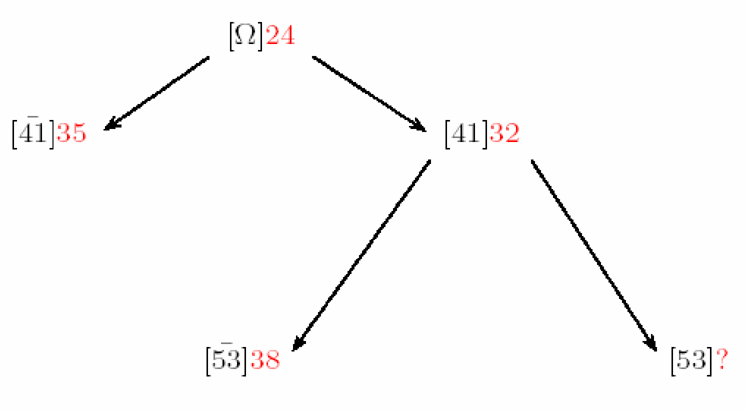
$$\begin{array}{|cccc|c}
7 & 5 & \infty & 8 & 5\\
\infty & 0 & 9 & 3 & 0\\
0 & \infty & 3 & 0 & 0\\
 & & & & \\
14 & 0 & 9 & \infty & 0\\
\hline
0 & 0 & 3 & 0 & 8
\end{array}$$

Falls **41 für die Tour** ausgewählt wird, **fügen wir die Summe der Zeilen- und Spaltenminima** von 8 zu der Anfangsabschätzung von 24 hinzu. Sämtliche Touren, welche die Zuordnung 41 enthalten, verursachen mindestens Kosten von
24 + 8 = 32.



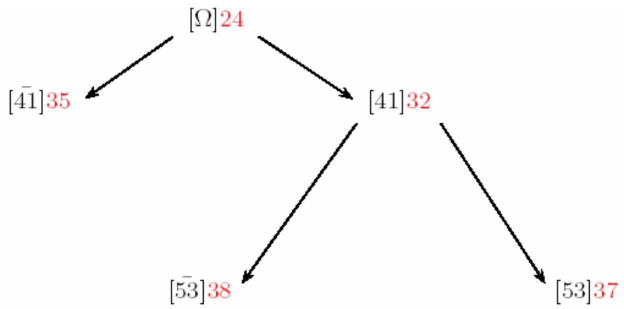
Die 0 mit den maximalen Strafkosten bestimmt nunmehr die nächste Zuordnung einer Teilstrecke zur Tour. Diese Zuordnung ist: 53 (auch 34 wäre maximal gewesen).

$$\begin{array}{|cccc|c}
2 & 0 & \infty & 3 & 2\\
\infty & 0 & 6 & 3 & 3\\
0 & \infty & 0 & 0 & 0\\
 & & & & \\
14 & 0 & 6 & \infty & 6\\
\hline
2 & 0 & 6 & 3 &
\end{array}$$



Nach Streichen der 5-ten Zeile, der 3-ten Spalte, sowie nach Ersetzendes Elements 35 durch ∞, können Zeilen- und Spaltenminima neu bestimmt werden.

2	∞	3	2
∞	6	3	3
0	0	∞	0
0	0	0	5



Man beachte, dass nunmehr die kostengünstigste Entwicklung ab dem Knoten 41 weiterverfolgt werden muss; wir kehren zur entsprechend revidierten Kostenmatrix zurück.

1. Da wir die Zuordnung 41 nunmehr ausschließen müssen, ersetzten wir die entsprechende 0 durch ∞ und bestimmen die neuen Zeilen- und Spaltenminima.

2. Jetzt können die neuen Strafkosten berechnet werden, die bei Verwerfen der durch 0 gekennzeichneten Zuordnungen entstehen.

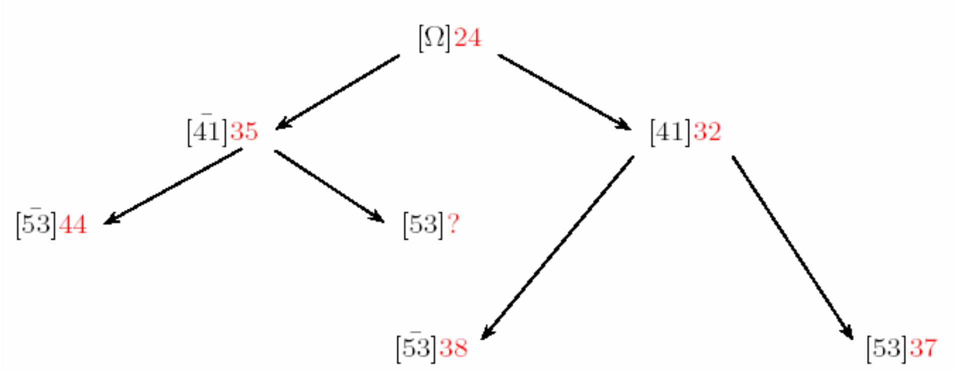
1.

∞	7	5	0	8	0
10	∞	0	9	3	0
7	0	∞	3	0	0
∞	6	10	∞	4	4
21	14	0	9	∞	0
7	0	0	0	0	11

2.

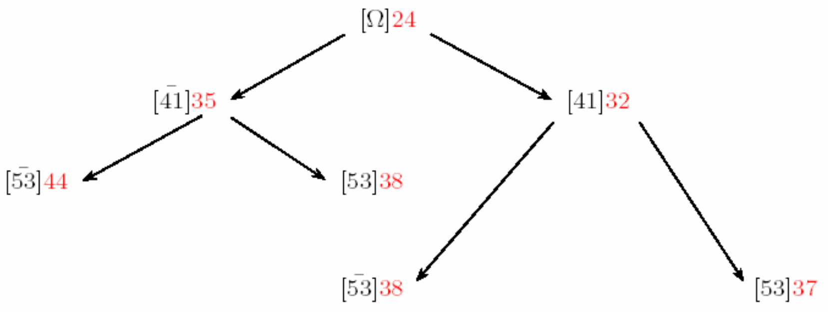
∞	7	5	0	8	5
3	∞	0	9	3	3
0	0	∞	3	0	0
∞	2	6	∞	0	2
14	14	0	9	∞	9
3	2	0	3	0	

Der Kandidat für die (nunmehr) erste Zuordnung ist 53.



Wir ersetzen die 0 bei 53 durch 1 streichen die Zeile und Spalte und bestimmen die neuen Minima.

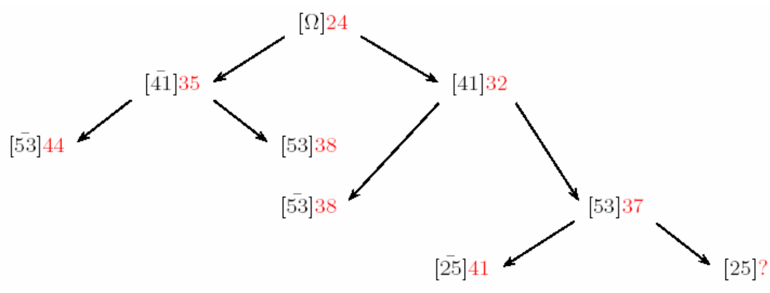
∞	7	0	8	0
3	∞	9	3	3
0	0	3	∞	0
∞	2	∞	0	0
0	0	0	0	3



Die günstigste Entwicklung ist nunmehr die Teiltour 41- 53. wir setzen unsere Kostenbetrachtung mit der reduzierten Kostenmatrix fort.

Die neue Zuordnung wird wiederum mit Hilfe der Strafkosten bestimmt, die bei Verwerfen der 0-Zuordnungen entstehen. Die nächste Auswahl: 25.

0	∞	1	1
∞	3	0	3
0	0	∞	0
0	3	1	



Nach Streichen der Zeile und Spalte wird noch 32 auf 1 gestellt, um den Kurzzyklus 2532 zu verhindern.

0	∞	0
∞	0	0
0	0	

Die minimale Tour: <u>125341</u>