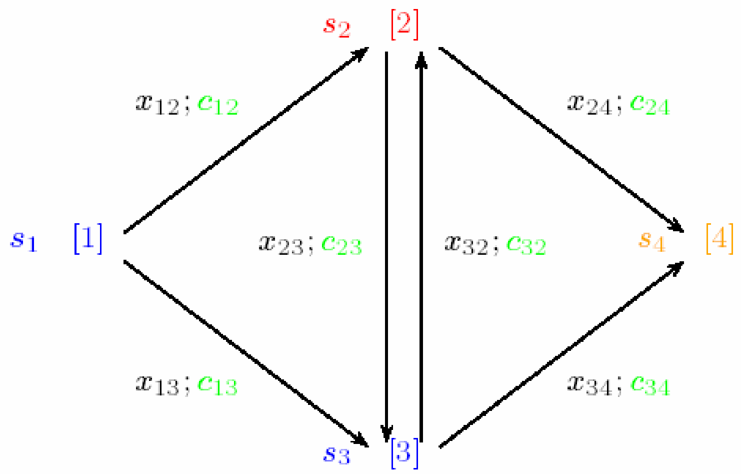
Verschiffungsproblem

- x_{ij} ……Entscheidungsvariablen
- c_{ij} …..Transportkosten von Pkt. I zu Pkt. J

Ein Verschiffungsproblem bestimmt kostenminimale Flüsse x_{ij}, mit $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$, die das Quellen-Angebot $s_{\triangleright}$ zur Deckung des Bedarfs $-s_{\triangleleft}$ in den Senken verwenden, wobei $s_{\bowtie} = 0$ in den neutralen Knoten.



LP – Problem:

$$\min Z = c * x$$

Nebenbedingungen:

$$Ax = s$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

$$x \geq 0$$

Inzidenzmatirx und Netzstruktur::

$$a_e(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad k = i \\ -1 & \text{falls} \quad k = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c|cccccc|} & \vec{12} & \vec{13} & \vec{23} & \vec{24} & \vec{32} & \vec{34} \\ \hline [1] & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2] & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ [3] & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ [4] & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

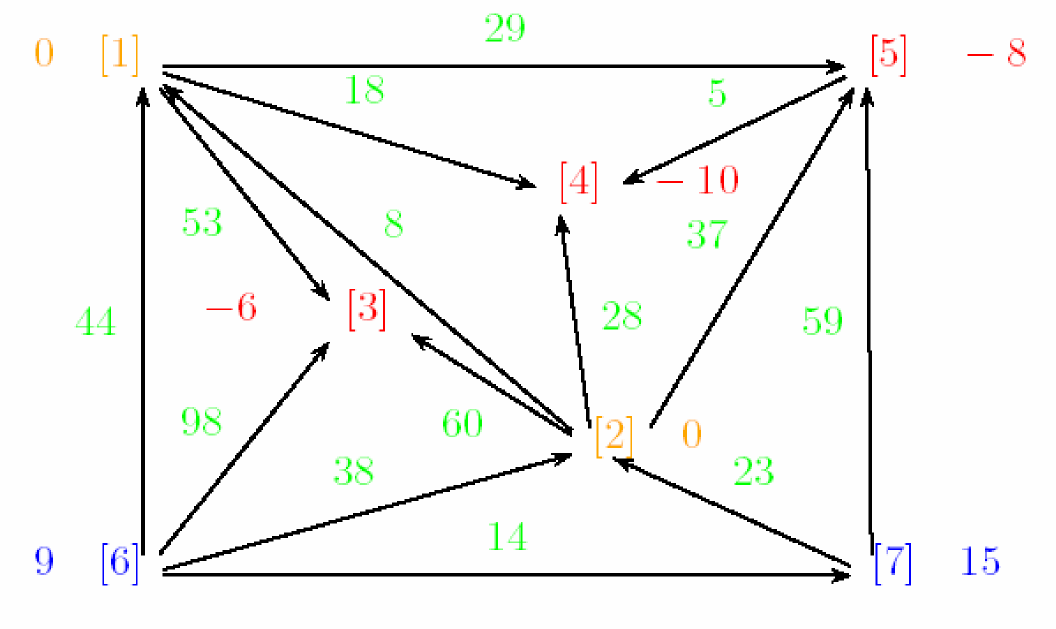
LP - Problem:

$$\min \{c_{12} \cdot x_{12} + c_{13} \cdot x_{13} + c_{23} \cdot x_{23} + c_{24} \cdot x_{24} + c_{32} \cdot x_{32} + c_{34} \cdot x_{34}\}$$

unter $\quad l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall \vec{ij}$ und den Nebenbedingungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{32} \\ x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

Konkretes Bsp.:



Nebenbedingungen für Ang., Nachfrageknoten und neutrale Knoten:

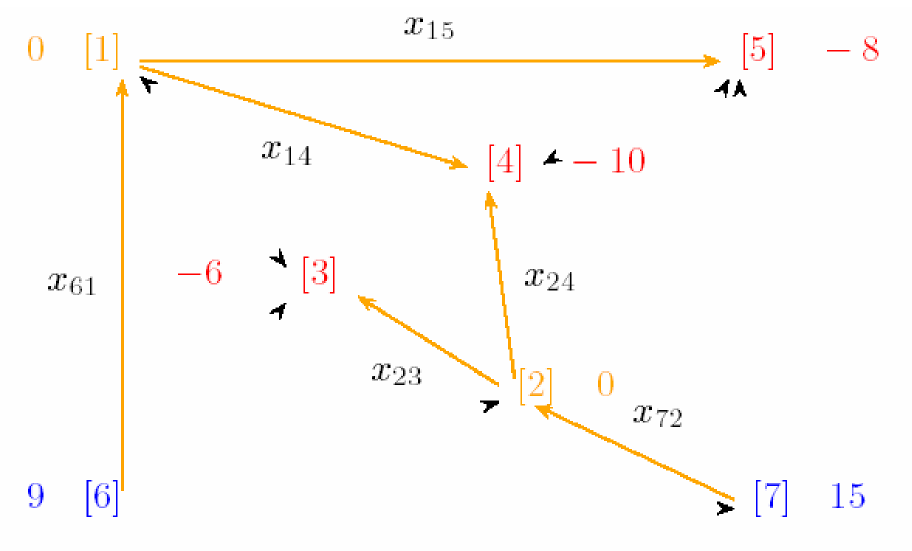
Angebotsknoten: S6 = OUTPUT – INPUT ≥ 0
Nachfrageknoten: S3 = OUTPUT – INPUT ≤ 0
Neutraler Knoten: S2 = OUTPUT – INPUT $= 0$

Ein spannender Baum:

Wir wollen eine erste Basislösung zu finden.

Wir suchen uns daher einen spannenden Baum der folgende Eigenschaften besitzt:

- alle n Knoten sind miteinander verbunden
- kein Kreis
- benötigen n-1 Pfeile

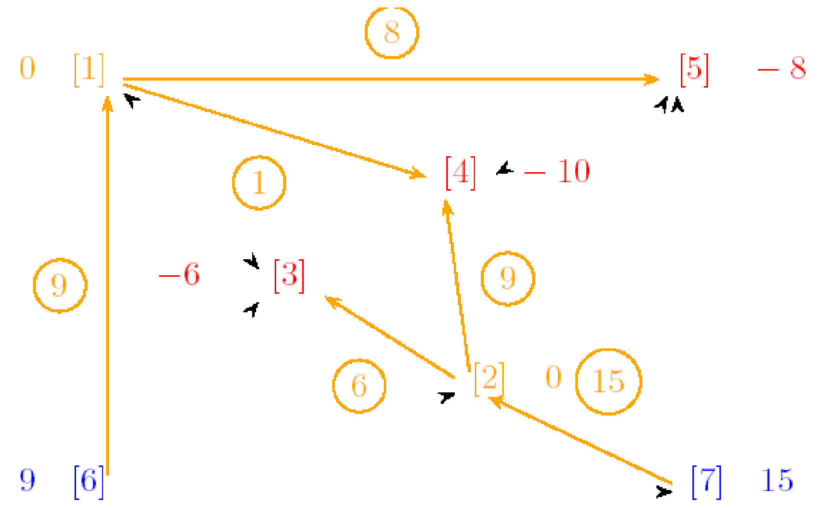


Baum und Gleichungssystem:

- Ist $i \to j \in Baum$ dann ist x_{ij} eine Basisvariable
- Ist $i \to j \notin Baum$ dann ist $x_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{14} \\ x_{15} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{61} \\ x_{72} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ -10 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Wir lösen nun dieses Gleichungssystem.



Um das Problem zu lösen führen wir den Begriff der **fairen Preise** ein:

$$y_j = y_i + c_{ij} \text{ in Pfeilrichtung}$$

bzw.

$$y_j = y_i - c_{ij} \text{ gegen Pfeilrichtung}$$

y6 = 0	y1 = 44	y4 = 62	y5 = 73	y2 = 34	y3 = 94	y7 = 11

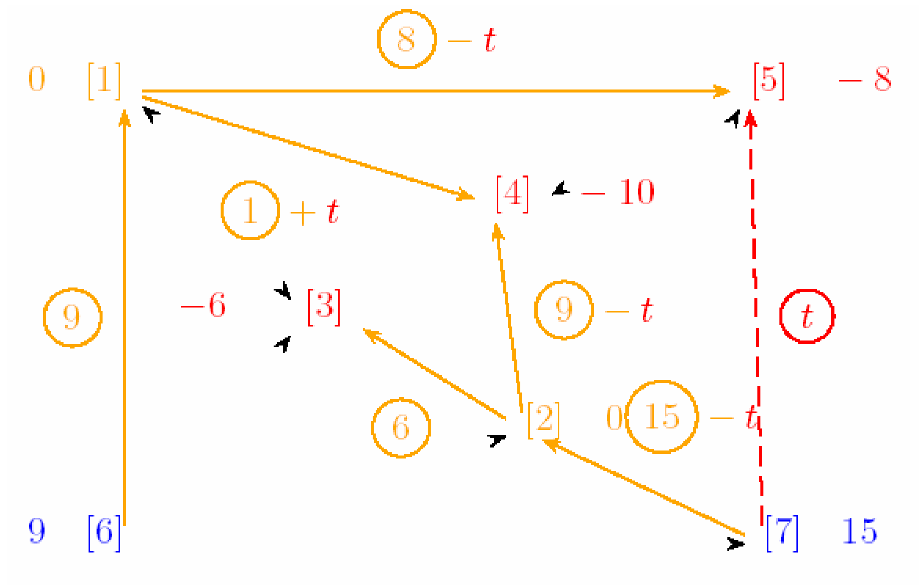
Wir untersuchen nun alle $i \rightarrow j \notin Baum$. Wenn wir nun einen Pfeil finden bei dem

$$y_j = y_i + c_{ij} \leq y_j$$

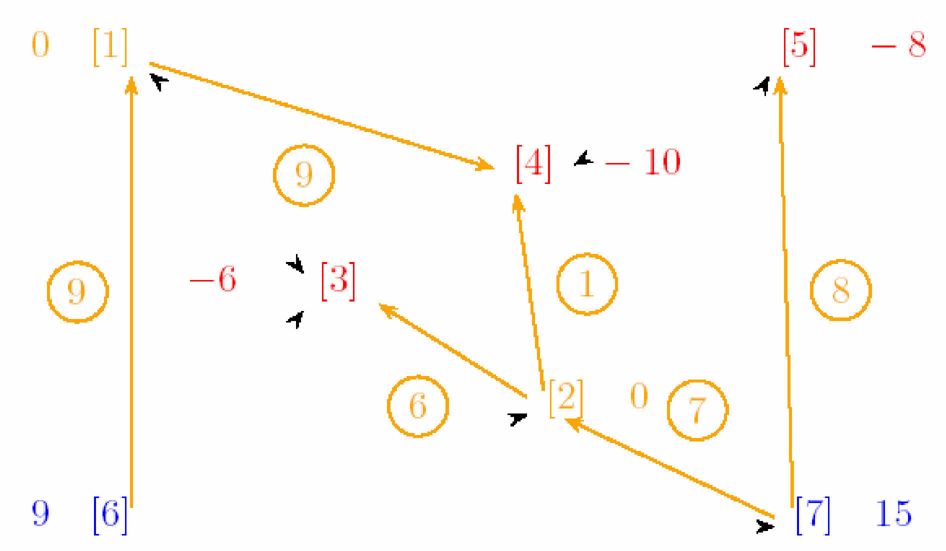
z.B.: $y_7 + 59 \leq y_5$

dann haben wir einen Weg gefunden bei dem die Transportkosten niedriger sind.
Wir gehen folgendermaßen vor:

- All Pfeile in Gegenrichtung -t
- All Pfeile in Richtung +t

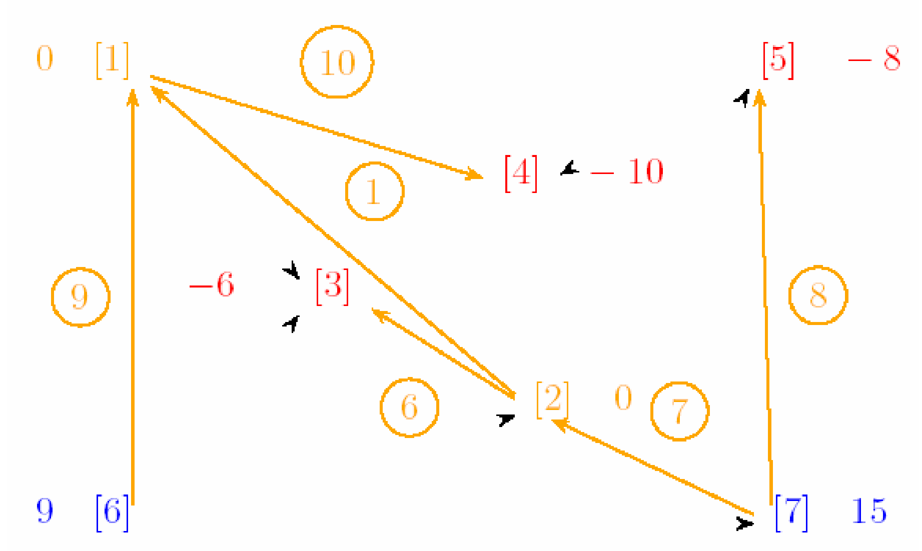


- Nun suchen wir von alle Pfeilen die in die Gegenrichtung weisen das mit dem kleinsten x_{ij} und „werfen" diesen aus der Basis.

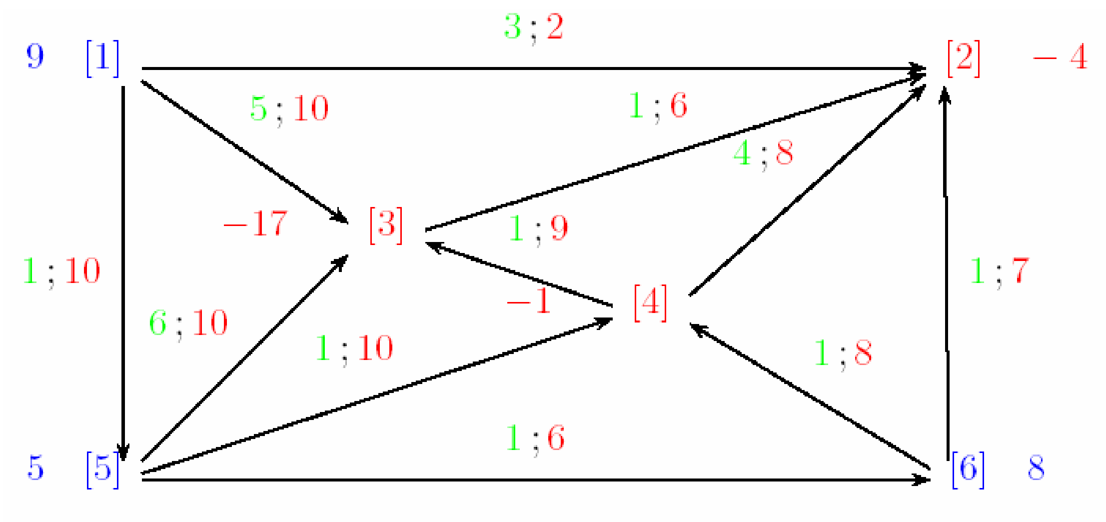


Jetzt berechnen wir die fairen Preise neu und wiederholen die Prozedur solange bis wir kein $y_j = y_i + c_{ij} \leq y_j$ mehr finden. So erhalten wir die optimale Lösung.

Optimale Lösung:



Verschiffungsproblem mit Kapazitäten

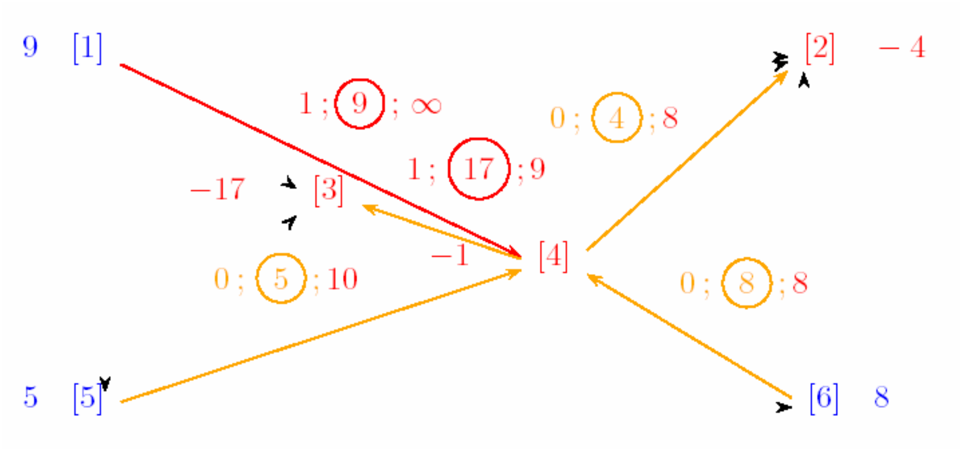


Wir haben nun eine obere Grenze für die Verschiffung eingeführt (in der Graphik rot). Somit erhalten wir eine neue Nebenbedingung:

$$x_{ij} \le u_{ij}$$

u_{ij} ….die Kapazität von Pkt. I nach Pkt. J

Um eine erste Basislösung zu finden betrachten wir nun ein Hilfsproblem: einen
„Bündelbaum"



Man nimmt einen beliebigen Knoten (in unserem Fall den Knoten 4), am besten einen mit viel „Verkehr".

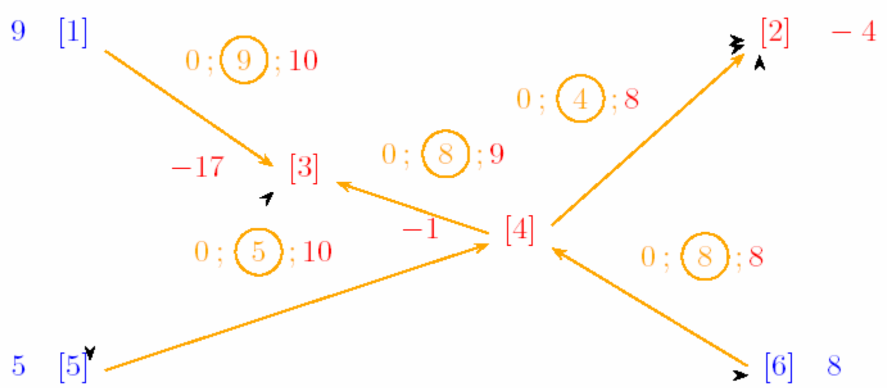
- Gelbe Pfeile sind **echte Pfeile**, sie stellen Wege dar die im Netzwerk vorhanden sind
- Ist nun ein Knoten nicht mit ausgewählten Knoten verbunden so wird ein **künstlicher Pfeil** eingeführt (hier rot).

Die fairen Preise berechnen sich folgendermaßen:

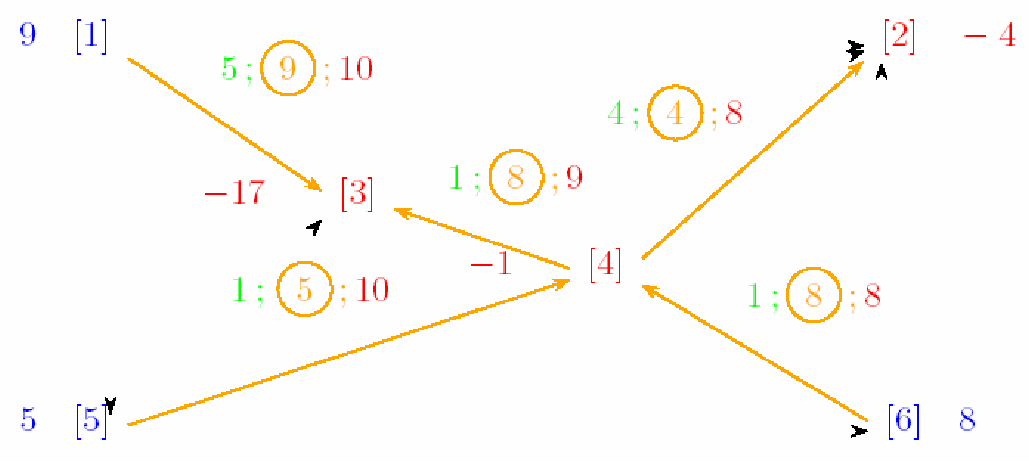
- Für echte Pfeile deren $x_{ij} \leq u_{ij}$ ist der faire Preis **0**
- Für echte Pfeile deren $x_{ij} \geq u_{ij}$ ist der faire Preis **1**
- Für künstliche Pfeile ist der faire Preis **-1**

In unserem Fall hat y_1 den fairen Preis -1 und y_3 den fairen Preis 1, der Rest hat den fairen Preis 0.

Man führt nun so wie weiter oben beschrieben die Suche nach einer optimalen Lösung bei einem Verschiffungsproblem durch. Ist dieses gelöst haben wir die erste zulässige Basislösung:

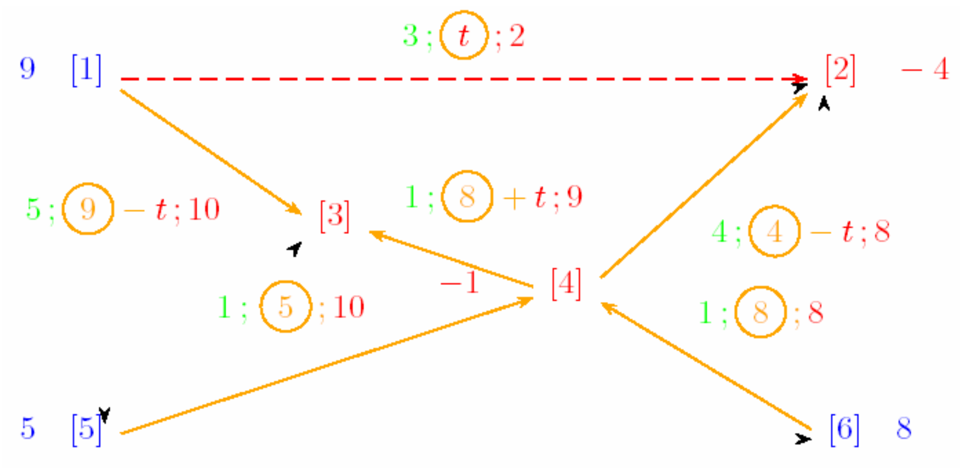


Nun setzten wir die „echten" Kosten wieder ein und berechnen uns die fairen Preise:



y1 = 0	y3 = 5	y4 = 4	y2 = 8	y5 = y6 = 3	y1 = 0	y3 = 5

Für $1 \to 2 \notin Baum$ und $x_{12} = 0$ gilt: $y_1 + c_{12} = 0 + 3 \leq y_2 = 8$
Somit haben wir einen eintretenden Basispfeil



Kapazitäten:

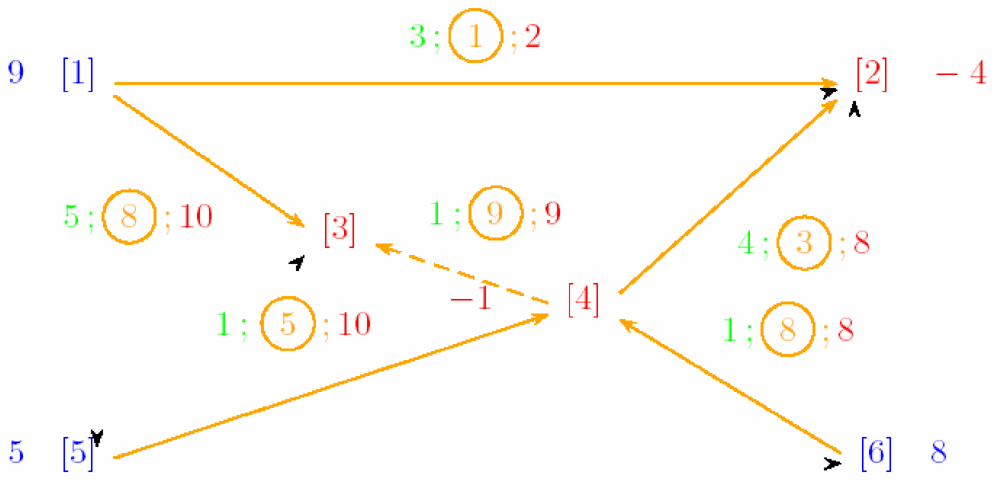
$t \leq 2$

$t \leq 4$

$8 + t \leq 9 \to t \leq 1$

$t \leq 9$

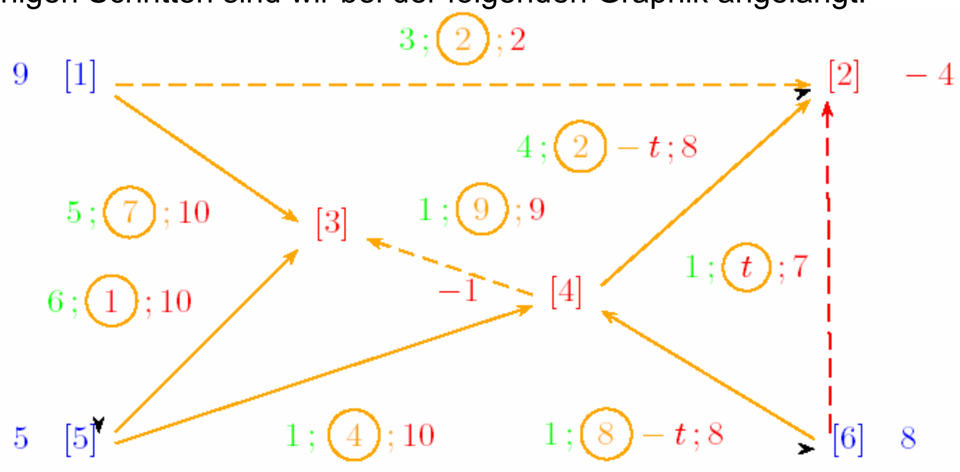
somit muß t=1 sein damit die neue Bedingung eingehalten wird



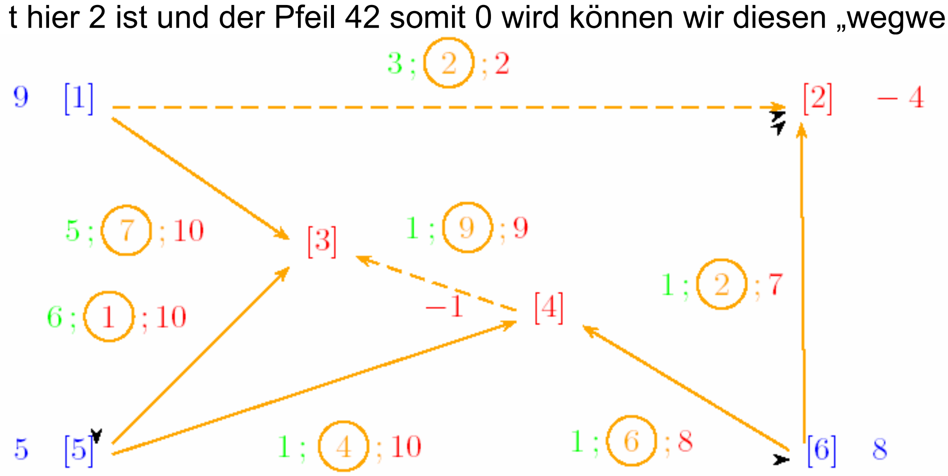
Der Pfeil 43 ist gesättigt und wird somit markiert und „offiziell“ rausgeworfen.

Nun beginnt das ganze von vorne, faire Preise berechnen….

Nach einigen Schritten sind wir bei der folgenden Graphik angelangt:



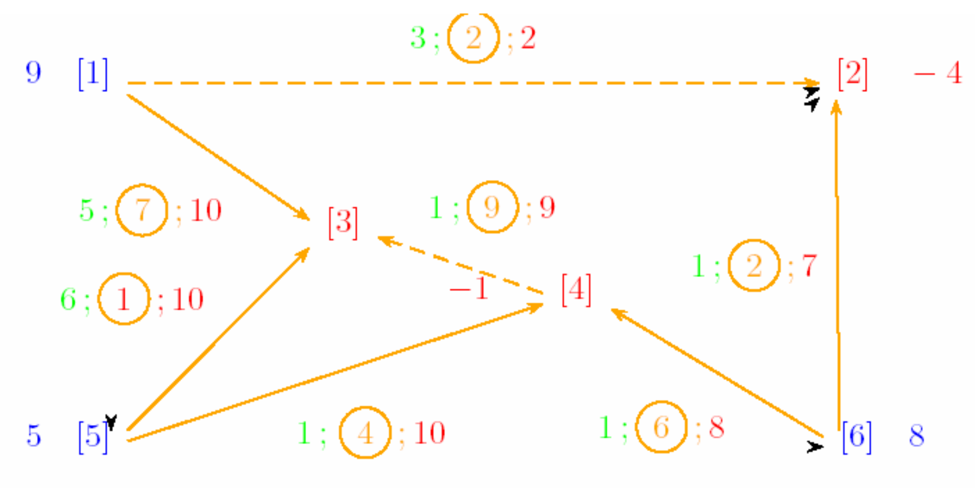
Nachdem t hier 2 ist und der Pfeil 42 somit 0 wird können wir diesen „wegwerfen“.



die fairen Preise sind nun:

y1 = 0	y3 = 5	y4 = 4	y2 = 8	y5 = y6 = 3	y1 = 0	y3 = 5

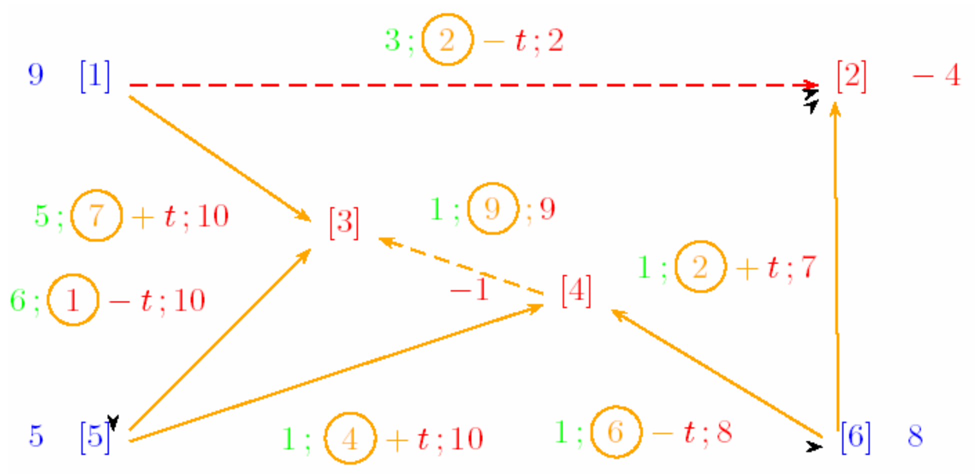
Wir finden keinen Pfeil mehr für den gilt $y_j = y_i + c_{ij} \leq y_j$



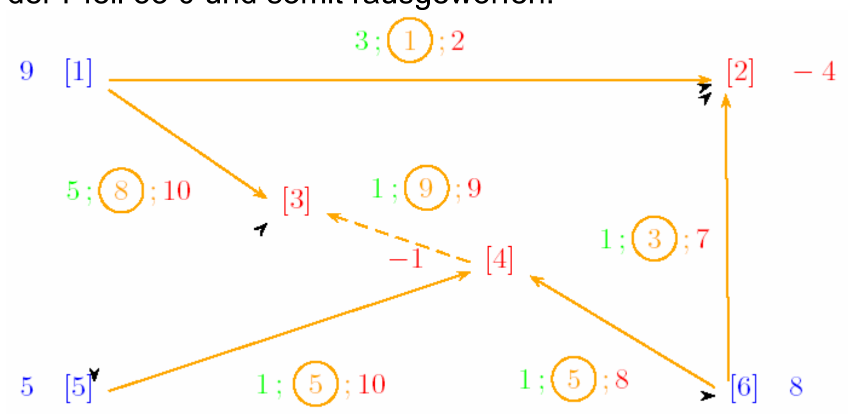
Nun suchen wir nach Pfeilen für die das umgekehrte gilt:

$$y_{j=}y_i + c_{ij} \geq y_j$$

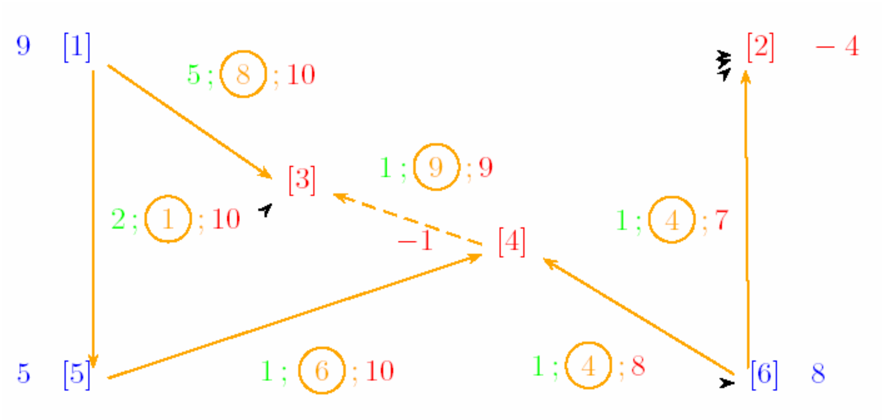
Für $1 \rightarrow 2 \notin Baum$ und $x_{12} = 2$ gilt: $y_1 + c_{12} = 0 + 3 \geq y_2 = 0$



mit t=1 wird der Pfeil 53 0 und somit rausgeworfen:



Nun beginnt das Ganze von vorne solange bis man keinen Pfeil mehr findet für den gilt: $y_i + c_{ij} \leq y_j$ oder $y_i + c_{ij} \geq y_j$



Sprich die Optimalitätsbedingung lautet:

$$(y_i + c_{ij} \leq y_j \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}) \cap (y_i + c_{ij} \geq y_j \Rightarrow x_{ij} = 0)$$

Das primale Problem	Das duale Problem
Zielfunktion: $\min \sum_{ij \in A} c_{ij} * x_{ij}$	Zielfunktion: $\max - \sum_{i \in A} s_i * y_i - \sum_{ij} u_{ij} * \lambda_{ij}$
Nebenbedingungen: $1: -a_i x = -s_i$ $2: -x_{ij} \geq -u_{ij}$	Nebenbedingungen: $1: -y_i + y_j - \lambda_{ij} \leq c_{ij}$
Man ordnet nun jeder Nebenbedingung eine neue Variable zu. $1: y_i$ $2: \lambda_{ij}$	Dieser Nebenbedingung ist x_{ij} zugeordnet

Im Optimum der primalen und dualen Aufgabe gelten die folgenden komplementären Schlupfbedingungen:

$$[u_{ij} - x_{ij}]\lambda_{ij} = 0 \quad \forall \vec{ij} \qquad\qquad [y_i + c_{ij} + \lambda_{ij} - y_j]x_{ij} = 0 \quad \forall \vec{ij}$$

Daraus folgt: (Satz vom komplementären Schlupf)

$$0 < x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow y_i + c_{ij} = y_j$$

$$y_i + c_{ij} > y_j \Rightarrow y_i + c_{ij} + \lambda_{ij} - y_j > 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$$

$$y_i + c_{ij} < y_j \Rightarrow \lambda_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$$