Dualitätstheorie

Das Standardproblem:

Das primale Problem	Das duale Problem
Zielfunktion: $\max \sum_{i=1}^{n} c_i * x_i$	Zielfunktion: $\min \sum_{j=1}^{m} b_j * y_j$
Nebenbedingungen: (m Nebenbed.) $Ax \leq b$ also i-te Nebenbedingung: $a_{i1}x_1 + ...a_{ij}x_j + ...a_{in}x_n \leq b_i$	Nebenbedingungen: (n Nebenbed.) $Ay \geq c$ also j-te Nebenbedingung: $a_{1j}y_1 + ...a_{ij}y_i + ...a_{mj}y_m \leq c_j$
Man ordnet nun den Nebenbedingung eine neue Variable zu. y_i	Dieser Nebenbedingung ist zugeordnet x_i

Spaltenkoeffizientenmatrix wird in dualer Aufgabe zu Zeilenmatrix:

$$p.A.: Ax \leq b \qquad\qquad d.A.: A^T y \geq c^T$$

Minimierung der Zielfunktion und frei Variable:

Ist die Zielfunktion $\sum_{i=1}^{n} c_i * x_i$ zu minimieren, so maximiert man einfach $-\sum_{i=1}^{n} c_i * x_i$

Verwendet man statt $x_j \geq 0$ die freie Variable $x_j \in R$, so

ersetzt man x_j durch $x_j^+ - x_j^-$

jwobei $x_j^+ \geq 0$ und $x_j^- \geq 0$

Aus $\min Z = x_1 + x_2$ und den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \in R$$

erhält man somit $\max Z = -x_1 - x_2^+ + x_2^-$ und den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \le 5$$
$$x_1 + x_2^+ - x_2^- \le 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2^+ \ge 0$$
$$x_2^- \ge 0$$

$\geq$- und =-Nebenbedingungen:

- In der NB ein = nehmen wir keine Überschussvariable sondern eine **künstliche Variable**
- In der NB ein $\geq$ ziehen wir eine Überschussvariable ab und zählen eine künstliche dazu

Bsp.:

$\min Z = x_1 - x_2$	$\max Z = -x_1 + x_2$
Nebenbedingungen:	Nebenbedingungen:
$x_1 + 2x_2 \le 5$	$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$
$x_1 + x_2 = 2$	$x_1 + x_2 + x_4' = 2$
$x_2 \ge 1$	$x_2 - x_5 + x_5' = 1$

x_4' und x_5' sind künstliche Variablen

x_5 ist eine Überschussvariable

Lösung mittels 2-Phasen-SIMPLEX:

Bestimme die erste zulässige Basislösung:

$\max Z = -x_4^{'} - x_5^{'}$ (Maximum = 0)

Nebenbedingungen:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_4^{'} = 2$$

$$x_2 - x_5 + x_5^{'} = 1$$

1.Phase:

Zeile	BV	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 x'_4	0 x_5	-1 x'_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	0	0	0	1	0	1	0	
1	x_3	1	2	1	0	0	0	5	
2	x'_4	1	1	0	1	0	0	2	
3	x'_5	0	1	0	0	-1	1	1	

Eine korrekte Zeile 0 müsste Koeffizienten 0 in den Spalten, die den Basisvariablen $x_4^{'}$ und $-x_5^{'}$ entsprechen, enthalten. Dies erreichen wir, indem wir die Summe aus den Zeilen 2 und 3 von der Zeile 0 abziehen.

Zeile	BV	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 x'_4	0 x_5	-1 x'_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	-1	-2	0	0	1	0	-3	
1	x_3	1	2	1	0	0	0	5	$5/2$
2	x'_4	1	1	0	1	0	0	2	$2/1$
3	x'_5	0	1	0	0	-1	1	1	$1/1$

Pivotspalte, -zeile und –element

Nach dem ersten Basisaustauschschritt:

Zeile	BV	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 x'_4	0 x_5	-1 x'_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	-1	0	0	0	-1	2	-1	
1	x_3	1	0	1	0	2	-2	3	
2	x'_4	1	0	0	1	1	-1	1	
3	x_2	0	1	0	0	-1	1	1	

Pivotspalte, -zeile und –element

Zeile	BV	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 x'_4	0 x_5	-1 x'_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	-1	0	0	0	-1	2	-1	
1	x_3	1	0	1	0	2	-2	3	$3/1$
2	x'_4	1	0	0	1	1	-1	1	$1/1$
3	x_2	0	1	0	0	-1	1	1	

optimale Lösung der ersten Phase

Zeile	BV	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 x'_4	0 x_5	-1 x'_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	0	0	0	1	0	1	0	
1	x_3	0	0	1	-1	1	-1	2	
2	x_1	1	0	0	1	1	-1	1	
3	x_2	0	1	0	0	-1	1	1	

2.Phase:

Wir streichen die künstlichen Variablen und verwenden wieder die ursprüngliche Zielfunktion (deren Basiskoeffizienten hier nicht 0 sind).

		-1	1	0	0	rechte	
Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_5	Seite	Quo.
0	Z	1	-1	0	0	0	
1	x_3	0	0	1	1	2	
2	x_1	1	0	0	1	1	
3	x_2	0	1	0	-1	1	

Anfangstableau zweite Phase nach Transformation der Zielfunktion
(Zeile 0- Zeile 2+ Zeile 3)

		-1	1	0	0	rechte	
Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_5	Seite	Quo.
0	Z	0	0	0	-2	0	
1	x_3	0	0	1	1	2	
2	x_1	1	0	0	1	1	
3	x_2	0	1	0	-1	1	

Pivotspalte, -zeile und –element

		-1	1	0	0	rechte	
Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_5	Seite	Quo.
0	Z	0	0	0	-2	0	
1	x_3	0	0	1	1	2	$2/1$
2	x_1	1	0	0	1	1	$1/1$
3	x_2	0	1	0	-1	1	

optimale Lösung der zweiten Phase

Zeile	BV	-1 x_1	1 x_2	0 x_3	0 x_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	2	0	0	0	2	
1	x_3	-1	0	1	0	1	
2	x_5	1	0	0	1	1	
3	x_2	1	1	0	0	2	

unzulässiges Problem 2-Phasen-SIMPLEX:

$$\max Z = -x_4'$$

Nebenbedingungen:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_4' = 2$$

Optimale Lösung der ersten Phase erreicht; da der Zielfunktionswert negativ ist und eine künstliche Basisvariable mit strikt positivem Wert vorhanden ist, existiert keine zulässige Lösung im ursprünglichen Problem.

Zeile	BV	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 x_4'	rechte Seite	Quo.
0	Z	0	0	1	0	-1	
1	x_1	1	1	1	0	1	
2	x_4'	0	0	-1	1	1	