LP – lineare Optimierung

1) Das LP Problem

Allgemein:

- n reele Variablen: $x_1 .... x_n$
- Zielfkt.: max $\sum_{i=1}^{n} c_i * x_i$
- m Nebenbedingungen: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq b_i$ für alle i = 1,…….m
- Nichtnegativitätsbedingung $x_j \geq 0$

Matrizenschreibweise:

$$A = (a_{ij}) ....Koeffizientenmatrix$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} ; \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$c = (c_1, ...c_n)$$

- Zielfkt.: max Z = c * x
- Nebenbedingungen: $Ax \leq b$
- $x \geq 0$

2) *Die Simplex Methode*

- zulässige Lösung: Lösung, die $Ax \le b$ und $x \ge 0$ genügt.
- optimale Lösung x*: zulässige Lösung für die gilt, Z* = cx* ≥ cx für alle zulässigen Lösungen x.
- Randgleichung: Nebenbedingung, bei der das Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzt wurde.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \le b_i$$

oder

$x_j = 0$ für j ∈ {1, . . . , n}.

Eigenschaften zulässiger Lösungen:

- Der Bereich der zulässigen Lösungen ist ein konvexes Polyeder. Die zulässigen Ecklösungen sind seine Eckpunkte.
- Die Anzahl zulässiger Ecklösungen ist höchstens:

$$\frac{(m+n)!}{m! * n!}$$

Eigenschaften optimaler Lösungen:

- Ist eine optimale Lösung eindeutig, so ist sie notwendigerweise eine zulässige Ecklösung.
- Existieren mehrere optimale Lösungen (nämlich ∞ viele), so sind mindestens zwei zulässige Ecklösungen optimal. Die Menge der optimalen Lösungen ist konvexe Hülle der optimalen Ecklösungen.

Das Simplextableau:

Zeile	BV	c_1 x_1	… …	c_n x_n	0 x_{n+1}	… …	0 x_{n+m}	rechte Seite	ZF-Koeff.
0	Z	$-c_1$	…	$-c_n$	0	…	0	0	
1	x_{n+1}	a_{11}	…	a_{1n}	1	.0.	0	b_1	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	0	.1.	0	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	x_{n+m}	a_{m1}	…	a_{mn}	0	.0.	1	b_n	0

3) Bsp. Produktionsplanung

Eine Firma erzeugt zwei **Produkte**:

P1 . . . Glas-Alurahmentür mit 3 Scheiben
P2 . . . Doppel-Holzfenster mit 2 Scheiben

in den **Abteilungen**

A1 . . . Alurahmenproduktion (maximal 4 pro ZE)
A2 . . . Holzrahmenproduktion (maximal 12 pro ZE)
A3 . . . Abteilung Glaseinbau (maximal 18 pro ZE)

Für die Produktion einer Einheit eines Produktes benötigen die Abteilungen jeweils folgende Kapazitäten:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \end{array}$$ ....**Koeffizientenmatrix**

Einheitsgewinn: 3 Geldeinheiten pro produzierter Einheit P1, 5 für P2.

LP – Problem:

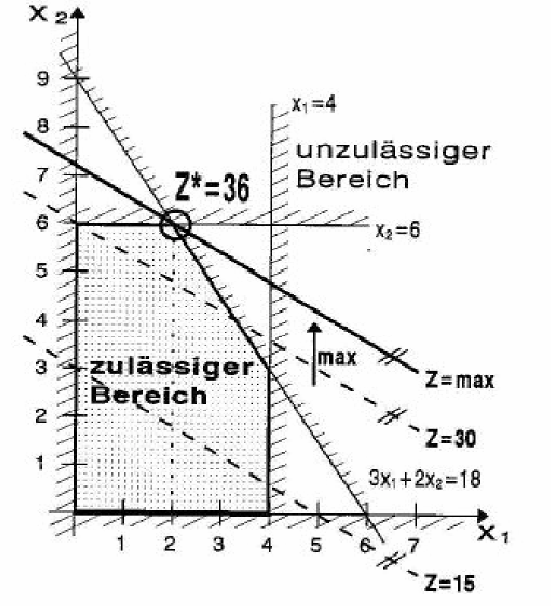
Zielfunktion: $\max Z = 3x_1 + 5x_2$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \end{aligned}$$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

Graphische Lösung:



SIMPLEX:

Schlupfvariablen:

$$x_3 = 4 - x_1$$

$$x_4 = 12 - 2x_2$$

$$x_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2$$

Anfangstableau

Zeile	BV	3 x_1	5 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.	Probe
0	Z	-3	-5	0	0	0	0		
1	x_3	1	0	1	0	0	4		
2	x_4	0	2	0	1	0	12		
3	x_5	3	2	0	0	1	18		

Wähle jene NBV mit dem am stärksten negativen Koeffizienten in Zeile 0 als **neue BV**. Die BV die den stärksten Zuwachs erzeugt ist eintretenden Basisvariable (bei uns x_2)

Die zugehörige Spalte heißt **Pivotspalte.**

Zeile	BV	3 x_1	5 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.	Probe
0	Z	-3	-5	0	0	0	0		
1	x_3	1	0	1	0	0	4		
2	x_4	0	2	0	1	0	12		
3	x_5	3	2	0	0	1	18		

In der Pivotspalte wählt man nun alle positiven Elemente aus und bildet die Quotienten

Zeile	BV	3 x_1	5 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.	Probe
0	Z	-3	-5	0	0	0	0		
1	x_3	1	0	1	0	0	4		
2	x_4	0	2	0	1	0	12	$12/2 = 6$	
3	x_5	3	2	0	0	1	18	$18/2 = 9$	

Die ausscheidende BV ist die, in deren Zeile der Quotient am kleinsten ist.

$\Longrightarrow x_4$

Die entsprechende Zeile nennt man Pivotzeile.
Pivotzeile und -spalte schneiden sich im Pivotelement.

Zeile	BV	3 x_1	5 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.	Probe
0	Z	-3	-5	0	0	0	0		
1	x_3	1	0	1	0	0	4		
2	x_4	0	2	0	1	0	12	$12/2 = 6$	
3	x_5	3	2	0	0	1	18	$18/2 = 9$	

Dividiere alle Elemente der Pivotzeile durch das Pivotelement.
$\Longrightarrow$ **Basiswechsel.**

Zeile	BV	3 x_1	5 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.	Probe
0	Z	-3	-5	0	0	0	0		
1	x_3	1	0	1	0	0	4		
2	x_2	0	1	0	$1/2$	0	6		
3	x_5	3	2	0	0	1	18		

Addiere zu jeder Zeile ein Vielfaches der Pivotzeile, so dass alle anderen Elemente in der Pivotspalte 0 werden.

		3	5	0	0	0	rechte		
Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Seite	Quo.	Probe
0	Z	-3	0	0	$5/2$	0	30		
1	x_3	1	0	1	0	0	4		$4*0$
2	x_2	0	1	0	$1/2$	0	6		$6*5$
3	x_5	3	0	0	-1	1	6		$6*0$

Und von vorne:
Bestimme neue Pivotspalte, markiere die positiven Elemente und berechne die Quotienten.

		3	5	0	0	0	rechte		
Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Seite	Quo.	Probe
0	Z	-3	0	0	$5/2$	0	30		
1	x_3	1	0	1	0	0	4	$4/1=4$	
2	x_2	0	1	0	$1/2$	0	6		
3	x_5	3	0	0	-1	1	6	$6/3=2$	

Bestimme neue Pivotzeile, Pivotelement und normiere die Pivotzeile. (siehe oben)

Bestimme **neues Tableau.** Da keine negativen Koeffizienten mehr in Zeile 0: optimale Lösung.

		3	5	0	0	0	rechte		
Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Seite	Quo.	Probe
0	Z	0	0	0	$3/2$	1	36		
1	x_3	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2		$2 * 0$
2	x_2	0	1	0	$1/2$	0	6		$6 * 5$
3	x_1	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2		$2 * 3$

optimale Lösung
$x_1 = 2$ $x_2 = 6$
$Z = 36$

4) *Nichteindeutigkeit bei SIMPLEX*

1 Problem: Problem ist unbeschränkt:

Zielfunktion: $\max Z = x_1 + x_2$

Nebenbedingungen: $x_1 - x_2 \leq 1$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

i	BV	1 x_1	1 x_2	0 x_3	0 x_4	rechte Seite	Quo.
0	Z	-1	-1	0	0	0	
1	x_3	1	-1	1	0	1	1
2	x_4	-1	1	0	1	1	

!!Wir finden zwar eine eintretende BV aber keine ausscheidende!!

i	BV	1 x_1	1 x_2	0 x_3	0 x_4	rechte Seite	Quo.
0	Z	0	-2	1	0	1	
1	x_1	1	-1	1	0	1	
2	x_4	0	0	1	1	2	

2 Problem: Degeneration:

Zielfunktion: $\max Z = 3x_1 + 2x_2$

Nebenbedingungen:

$$x_1 \leq 6$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

Zeile	BV	3 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	-3	-2	0	0	0	0	
1	x_3	1	0	1	0	0	6	6
2	x_4	0	2	0	1	0	12	
3	x_5	3	2	0	0	1	18	$18/3$

!!Die ausscheidende BV ist nicht eindeutig!!
Basisvariable x5 wird 0: Degeneration!

Zeile	BV	3 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	0	-2	3	0	0	18	
1	x_1	1	0	1	0	0	6	
2	x_4	0	2	0	1	0	12	$12/2$
3	x_5	0	2	-3	0	1	0	0

vorige Lösung war also schon optimal!

Zeile	BV	3 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	0	0	0	0	1	18	
1	x_1	1	0	1	0	0	6	$6/1$
2	x_4	0	0	3	1	-1	12	$12/3$
3	x_2	0	1	$-3/2$	0	$1/2$	0	

Kein Austausch x4 gegen x3 mehr nötig!

Zeile	BV	3 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	rechte Seite	Quo.
0	Z	0	0	0	0	1	18	
1	x_1	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2	
2	x_3	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	4	
3	x_2	0	1	0	$1/2$	0	6	